UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)

3er Parcial MODELO

MA-1111, MODELO III, Enero – Marzo 2007

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. Dibuje la gráfica de la función *f* que satisfaga las siguientes condiciones: (1 Pto c/u)

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$
(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$
(c) $f(0) = -1$
(d) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$
(e) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$
(f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$
(g) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$
(h) $f(-1) = -2$
(i) $f'(-1)$ no existe
(j) $f''(1) = 0$
(k) $f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
(l) $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

2. Se quiere cercar un campo rectangular que esta a la orilla de un camino. Si la cerca del lado del camino cuesta 80 Bs el metro lineal y las demás cercas cuestan 10 Bs el metro lineal, calcular el campo de mayor área que puede cercarse con 28.800 Bs. (6 Ptos)

3. considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{(2x-4)^2}$ y determine: (1 Pto c/u)
   a) El dominio, raíces e intervalo de continuidad.
   b) Asíntotas.
   c) Los intervalos de monotonía
   d) Los puntos donde se alcanzan máximos y mínimos (absolutos y relativos)
   e) Los intervalos de concavidad.
   f) Puntos de inflexión
   g) Bosqueje el grafico de función y de su rango.

4. Demuestre que para todo par de números reales *x* e *y* tales que; $0 < y \le x$ y cualquier numero natural *n*, se tiene que: (5 Ptos)
$$x^n - y^n \le nx^{n-1}(x-y)$$

5. Determinar los valores de *a* y *b* para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, posea una recta tangente en el punto (1,*f*(1)) que sea paralela a recta de ecuación $y = 7x - 3$ y adicionalmente alcance un valor extremo en $x = -1$ (6 Ptos)

6. Hallar las derivadas de las funciones siguientes: (4 Ptos)
   a) $f(x) = \cos^2(arcsen(x^3))$
   b) $f(t) = \arctan(x) + \arctan\left(x^{-1}\right)$
   c) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1-\tan^2\left(x^2\right)}}{2-x}$
   d) $h(x) = \arctan(sen(x))$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)

3er Parcial MODELO

1. Dibuje la gráfica de la función *f* que satisfaga las siguientes condiciones: (1 Pto c/u)

   (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$

   (b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

   (c) $f(0) = -1$

   (d) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

   (e) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

   (f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$

   (g) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$

   (h) $f(-1) = -2$

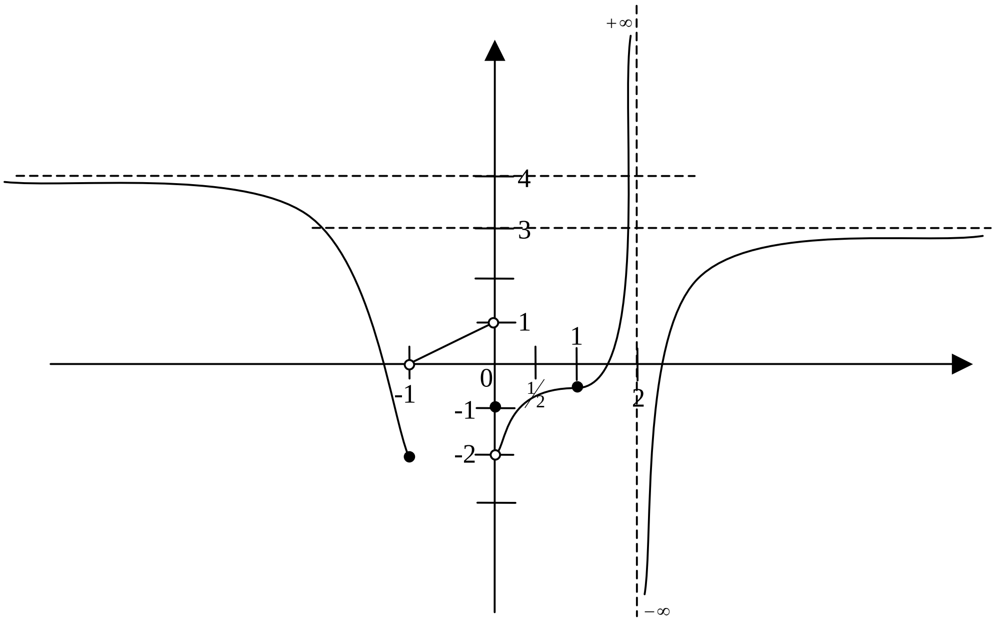
   (i) $f'(-1)$ no existe

   (j) $f''(1) = 0$

   (k) $f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

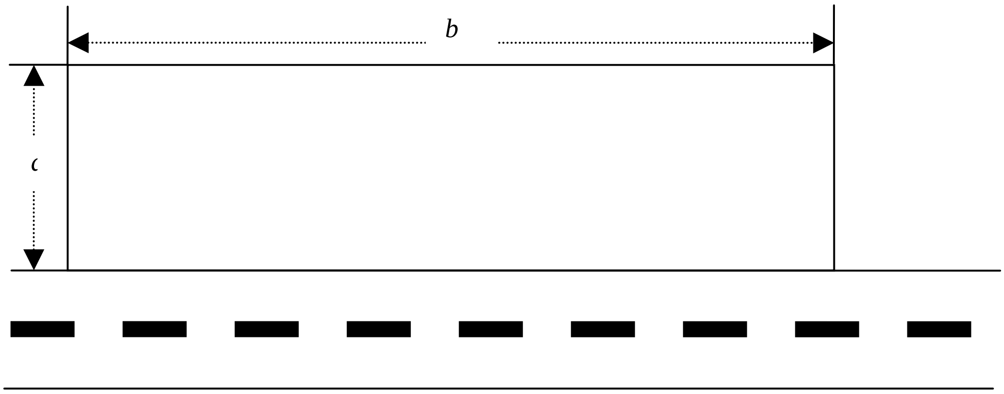
   (l) $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

   Solución:



2. Se quiere cercar un campo rectangular que esta a la orilla de un camino. Si la cerca del lado del camino cuesta 80 Bs el metro lineal y las demás cercas cuestan 10 Bs el metro lineal, calcular el campo de mayor área que puede cercarse con 28.800 Bs. (6 Ptos)

   Solución:



El área del campo cercado es: $area(a,b) = a.b$, pero el costo de fabricación debe ser: $10(2a)+10b+80b = 28.800$

$$\Leftrightarrow 20a + 90b = 28.800$$

$$\Leftrightarrow a = 1440 - \frac{9}{2}b$$

Luego, El área del campo cercado es: $area(b) = \left(1440 - \frac{9}{2}b\right).b$

Los valores admisibles físicamente para b son: $0 < b < 320$, como la función área es continua en [0, 320], y en consecuencia esa función en el intervalo [1, 360] alcanza sus valores extremo, razón por la cual incluimos los valore 0 y 360 en el análisis del problema.

Puntos críticos:

- Puntos extremos:
  $b_0 = 0$, $f(b_0) = 0$
  $b_1 = 320$, $f(b_1) = 0$
- Puntos singulares no hay, ya que la función es diferenciable en el intervalo [0, 320]
- Puntos estacionarios:

$$(area(b))' = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(1440 - \frac{9}{2}b\right).b\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{2}b \quad -\frac{9}{2}b + 1440 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9b + 1440 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 160$$

luego:

$b_2 = 160$, $f(b_2) = 115.200$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)

3er Parcial MODELO

Como el valor máximo de la función area(b) debe ser alcanzado en un punto crítico, entonces debe ser alcanzado en b=160, y en consecuencia las dimensiones del campo con mayor área es a=720, b=160

3. considere la función $f(x)=\dfrac{2x}{(2x-4)^2}$ y determine:

   a) Los puntos donde se alcanzan máximos y mínimos (absolutos y relativos) (1 Pto c/u)
   b) Los intervalos de concavidad.
   c) Puntos de inflexión
   d) Bosqueje el grafico de función y de su rango.

   Solución:

$$f(x)=\frac{2x}{(2x-4)^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{(x-2)^2}$$

$$f(x)=0 \iff x=0$$

$$f \textit{ no está definida en } x=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{(x-2)^2-2x(x-2)}{(x-2)^4}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{(x-2)(x-2-2x)}{(x-2)^4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(-x-2)}{(x-2)^3}\right]=-\frac{1}{2}\frac{x+2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x)=0 \iff x=-2$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-2)^3-3(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^6}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-2)^2(x-2-3x-6)}{(x-2)^6}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{-2x-8}{(x-2)^4}\right]$$

$$=\left[\frac{x+4}{(x-2)^4}\right]$$

$$f''(x)=0 \iff x=-4$$

Utilizando L´hôpital: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(2x-4)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4(2x-4)}=0$ y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$-\infty$ -4 -2 0 2 $+\infty$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)

3er Parcial MODELO

$f(x)$	0 - $-\frac{1}{18}$	- $-\frac{1}{16}$	-	0 + $+\infty$	$+\infty$ + 0
$f'(x)$	-	-	+	+	-
Creci miento	↘	↘	↗	↗	↘
$f''(x)$	-	+	+	+	+
Conca vidad	I	Y	Y	Y	Y

a) El dominio, raíces e intervalo de continuidad.
$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Raíces: $x = 0$
Intervalos de continuidad: $(-\infty,2)$ Y $(2,+\infty)$

b) Asíntotas.
Verticales en x=2, Horizontales de ecuación y=0

c) Los intervalos de monotonía
Intervalos de crecimiento: $[-2,2)$
Intervalos de decrecimiento: $[-\infty,-2]$, $(2,+\infty)$

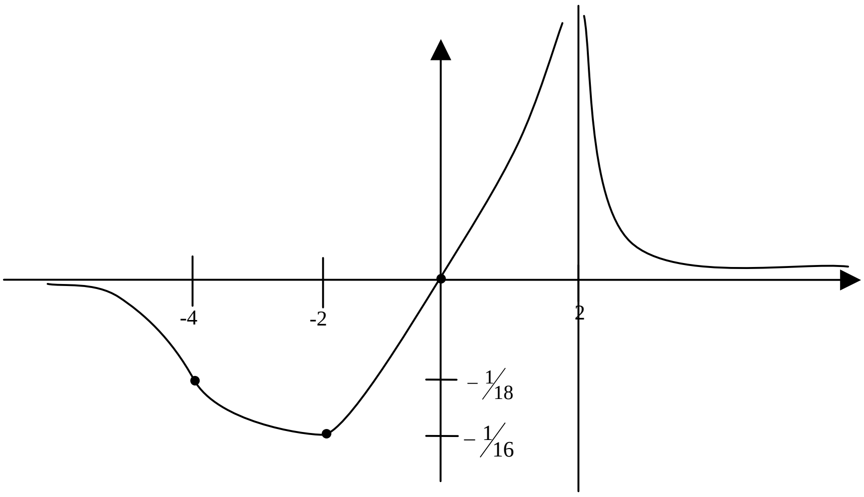
d) Los puntos donde se alcanzan máximos y mínimos (absolutos y relativos)
Solamente la función alcanza un valor un mínimo local en $x = -2$ y a su vez alcanza un mínimo global en ese punto, ya que la función es decreciente a la izquierda de -2, es creciente en [-2,2), toma valores positivos en $(2,+\infty)$ y $f(-2) = -\frac{1}{16}$

e) Los intervalos de concavidad.
Intervalos de concavidad hacia arriba: [-4,2), $(2,+\infty)$
Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty,-4]$

f) Puntos de inflexión
$\left(-4,-\frac{1}{18}\right)$, ya que ahí existe un cambio de concavidad

g) Bosqueje el grafico de función y de su rango.

3er Parcial MODELO



4. Demuestre que para todo par de números reales x e y tales que; $0 < y \le x$ y cualquier numero natural n, se tiene que: (5 Ptos)

$$x^n - y^n \le nx^{n-1}(x-y)$$

Solución:

Tomando $f(t) = t^n$, como f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, se puede utilizar el teorema del valor medio en el intervalo [y,x], por lo tanto existe c entre y y x tal que: $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}$

Como $f'(t) = nt^{n-1}$, entonces $nc^{n-1} = \dfrac{x^n - y^n}{x-y}$

Utilizando el hecho que $0 < y < c < x \;\Rightarrow\; c^{n-1} < x^{n-1}$

se obtiene: $\dfrac{x^n - y^n}{x-y} < nx^{n-1}$

En consecuencia: $x^n - y^n \le nx^{n-1}(x-y)$

5. Determinar los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, posea una recta tangente en el punto (1,f(1)) que sea paralela a recta de ecuación $y = 7x - 3$ y adicionalmente alcance un valor extremo en $x = -1$ (6 Ptos)

Solución:

- Recta tangente en (1,f(1))

  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\Rightarrow\; f'(1) = 3 + 2a + b$

  La condición de paralelismo indica que:

$f'(1)=7 \;\Rightarrow\; 3+2a+b=7$

La condición sobre alcanzar un punto extremo en -1, indica:

$f'(-1)=0 \;\Rightarrow\; 3-2a+b=0$

Luego a y b satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2a+b=4 \\ -2a+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

6. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\cos^2(arcsen(x^3))$

$$f(x)=1-sen^2(arcsen(x^3))$$
$$=1-x^6$$
$$f'(x)=-6x^5$$

(4 Ptos)

b) $f(t)=\arctan(x)+\arctan\left(x^{-1}\right)$

$$f'(t)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

c) $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-\tan^2\left(x^2\right)}}{2-x}$

$$g'(x)=\frac{\dfrac{4\tan\left(x^2\right)\sec\left(x^2\right)x}{2\sqrt{1-\tan^2\left(x^2\right)}}(2-x)-(-1)\sqrt{1-\tan^2\left(x^2\right)}}{(2-x)^2}$$

$$=\frac{4\tan\left(x^2\right)\sec\left(x^2\right)x(2-x)+2\left(1-\tan^2\left(x^2\right)\right)}{2(2-x)^2\sqrt{1-\tan^2(x^2)}}$$

$$=\frac{2\tan\left(x^2\right)\sec\left(x^2\right)x(2-x)+\left(1-\tan^2\left(x^2\right)\right)}{2(2-x)^2\sqrt{1-\tan^2(x^2)}}$$

d) $h(x)=\arctan(sen(x))$

$$h'(x)=\frac{\cos(x)}{1+sen^2(x)}$$